

成考专升本高等数学（二）2025 年真题汇编

答题时间：150 分钟 总题数：18 题 总分：150 分 类别：历年真题

1 【单选】(总分 7 分)

当 $x \rightarrow 0$ 时, $3-3\cos x$ 与 x^α 为同阶无穷小量, 则 $\alpha =$

A 1

B 2

C 3

D 4

[结果] 正确答案是： B

[解析]

步骤 1: 明确同阶无穷小的定义

若 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小, 则:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = C \quad (C \text{ 为非零常数})$$

步骤 2: 对 $3-3\cos x$ 做等价无穷小替换

当 $x \rightarrow 0$ 时, $1-\cos x$ 的等价无穷小是 $\frac{1}{2}x^2$ (由泰勒展开: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$, 故

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2))。$$

因此:

$$3 - 3\cos x = 3(1 - \cos x) \sim 3 \cdot \frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{2}x^2 \quad (x \rightarrow 0)$$

步骤 3: 结合同阶无穷小的定义求 α

已知 $3-3\cos x$ 与 x^α 是同阶无穷小, 即:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-3\cos x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2}x^2}{x^\alpha} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x^{2-\alpha}$$

要使该极限为非零常数, 需指数 $2-\alpha=0$ (否则极限为 0 或无穷大), 即 $\alpha=2$ 。

2 【单选】(总分 7 分)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x+1} =$$

A 2

B 1

C 0

D -1

[结果] 正确答案是：C

[解析]

1. 直接代入极限点计算

当 $x \rightarrow 0$ 时，分子 $\sin 2x$ 中 $2x \rightarrow 0$ ，故 $\sin 2x \rightarrow \sin 0 = 0$ ；

分母 $x + 1 \rightarrow 0 + 1 = 1$ 。

2. 计算极限值

原式为 " $\frac{0}{1}$ " 型，直接代入得：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x+1} = \frac{0}{1} = 0$$

3 【单选】 (总分 7 分)

设函数 $f(x) = \ln(2 + \sqrt{x^2 + 5})$ ，则 $f'(0) =$

A 0

B $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C $\sqrt{5}$

D 5

[结果] 正确答案是：A

[解析]

函数 $f(x) = \ln(2 + \sqrt{x^2 + 5})$ 是三层复合函数，需用链式法则求导：

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2 + \sqrt{x^2 + 5}} \cdot \frac{d}{dx} (2 + \sqrt{x^2 + 5}) \\ &= \frac{1}{2 + \sqrt{x^2 + 5}} \cdot \left(0 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 5}} \cdot 2x \right) \\ &= \frac{1}{2 + \sqrt{x^2 + 5}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5} \cdot (2 + \sqrt{x^2 + 5})}. \end{aligned}$$

将 $x = 0$ 代入导函数：

$$f'(0) = \frac{0}{\sqrt{0^2 + 5} \cdot (2 + \sqrt{0^2 + 5})} = 0.$$

4 【单选】(总分 7 分)

设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{7x+4}-2}{x}, & \text{amp; } x \neq 0 \\ k, & \text{amp; } x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $k=$

A 0

B $\frac{1}{2}$

C 1

D $\frac{7}{4}$

[结果] 正确答案是： D

[解析]

1. 分子有理化

分子分母同乘 $\sqrt{7x+4}+2$ (分子的共轭式) :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{7x+4}-2}{x} &= \frac{(\sqrt{7x+4}-2)(\sqrt{7x+4}+2)}{x(\sqrt{7x+4}+2)} \\ &= \frac{(7x+4)-4}{x(\sqrt{7x+4}+2)} \\ &= \frac{7x}{x(\sqrt{7x+4}+2)}\end{aligned}$$

2. 约分并计算极限

当 $x \neq 0$ 时, 约去分子分母的 x :

$$\frac{7x}{x(\sqrt{7x+4}+2)} = \frac{7}{\sqrt{7x+4}+2}$$

代入 $x \rightarrow 0$ 计算极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7}{\sqrt{7x+4}+2} = \frac{7}{\sqrt{0+4}+2} = \frac{7}{2+2} = \frac{7}{4}$$

5 【单选】(总分 7 分)

设函数 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 则 $f''(0) =$

- A -1
- B 0
- C $\frac{1}{2}$
- D 1

[结果] 正确答案是: B

[解析]

首先求 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ 的一阶导数 $f'(x)$ 。

根据除法求导公式 $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ ，这里 $u = x$ ， $u' = 1$ ； $v = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ 。

先对 $v = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ 求导，根据复合函数求导公式，令 $t = 1+x$ ，则 $v = t^{\frac{1}{2}}$ ， $v' = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \cdot t' = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ 。

那么 $f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{1+x} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x}}}{1+x} = \frac{\frac{1+x-x}{\sqrt{1+x}}}{1+x} = \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}$ 。

然后求二阶导数 $f''(x)$ ，对 $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} = (1+x)^{-\frac{3}{2}}$ 求导，根据复合函数求导公式，令 $t = 1+x$ ，则 $y = t^{-\frac{3}{2}}$ ， $y' = -\frac{3}{2}t^{-\frac{5}{2}} \cdot t' = -\frac{3}{2}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x = -\frac{3x}{(1+x)^{\frac{5}{2}}}$ 。

最后将 $x = 0$ 代入 $f''(x)$ ，可得 $f''(0) = -\frac{3 \times 0}{(1+0)^{\frac{5}{2}}} = 0$ 。

6 【单选】(总分 7 分)

$\int \sin(x+1)dx =$

- A $-\cos(x+1)+C$
- B $\cos(x+1)+C$
- C $-\sin(x+1)+C$
- D $\sin(x+1)+C$

[结果] 正确答案是：A

[解析]

利用换元法，令 $u = x + 1$ ，则 $du = dx$ 。

原不定积分 $\int \sin(x+1)dx$ 就变为 $\int \sin u du$ 。

根据基本积分公式 $\int \sin t dt = -\cos t + C$ (C 为任意常数)，对于 $\int \sin u du$ ，其结果为 $-\cos u + C$ 。

再把 $u = x + 1$ 代回，得到 $-\cos(x+1) + C$ 。

7 【单选】(总分 7 分)

$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx =$

- A 0
- B $\ln 2$
- C 1
- D $\ln 3$

[结果] 正确答案是：B

[解析]

可利用换元积分法来求解 $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$ 。

设 $t = \ln x$, 对 $t = \ln x$ 求导, 根据求导公式 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, 可得 $dt = \frac{1}{x} dx$ 。

当 $x = e$ 时, $t = \ln e = 1$; 当 $x = e^2$ 时, $t = \ln e^2 = 2$ 。

那么 $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_1^2 \frac{1}{t} dt$ 。

根据积分公式 $\int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C$, 可得 $\int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^2$ 。

根据牛顿-莱布尼茨公式 $F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$, 则 $\ln t \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1$ 。

因为 $\ln 1 = 0$, 所以 $\ln 2 - \ln 1 = \ln 2$ 。

8 【单选】(总分 7 分)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx =$$

A $\frac{1}{4}$

B $\frac{1}{2}$

C 1

D 2

[结果] 正确答案是: D

[解析]

将 $\frac{1}{\sqrt{e^x}}$ 变形为 $e^{-\frac{x}{2}}$, 则原积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx$ 。

步骤二: 换元

令 $t = \frac{x}{2}$, 则 $x = 2t$, $dx = 2dt$ 。

当 $x = 0$ 时, $t = 0$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $t \rightarrow +\infty$ 。

此时原积分变为 $\int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot 2dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ 。

步骤三: 计算积分

根据积分公式 $\int e^{-t} dt = -e^{-t} + C$, 计算 $2 \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{+\infty} e^{-t} dt &= 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-t} dt \\ &= 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} (-e^{-t}) \Big|_0^b \\ &= 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} (-e^{-b} - (-e^{-0})) \\ &= 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} (-e^{-b} + 1) \\ &= 2 \times (0 + 1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

9 【单选】(总分 7 分)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt =$$

- A -2
- B 0
- C 1
- D 2

[结果]正确答案是： C

[解析]

步骤一：判断是否满足洛必达法则条件

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^x \cos t^2 dt \rightarrow \int_0^0 \cos t^2 dt = 0$, $x \rightarrow 0$, 即原式为 $\frac{0}{0}$ 型的极限, 满足洛必达法则的条件。

步骤二：利用洛必达法则和变上限积分求导法则求极限

根据洛必达法则, 对于 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, 有 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 。

对 $\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$ 的分子分母分别求导:

- 对分子 $\int_0^x \cos t^2 dt$ 求导, 根据变上限积分求导法则, 若 $F(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt$, 则 $F'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, 这里 $a = 0$, $\varphi(x) = x$, $f(t) = \cos t^2$, 所以 $(\int_0^x \cos t^2 dt)' = \cos x^2$ 。
- 对分母 x 求导, $(x)' = 1$ 。

$$\text{则} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^2}{1}.$$

步骤三：计算极限

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\cos x^2 \rightarrow \cos 0 = 1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^2}{1} = 1$ 。

10 【单选】(总分 7 分)

设随机变量 X 的概率分布为:

X	-1	0	1
P	a	$3a$	a

, 则 $a =$

- A 0.2
- B 0.3
- C 0.4
- D 0.5

[结果]正确答案是： A

[解析]

根据离散型随机变量概率分布的性质：所有可能取值的概率之和为1。

已知随机变量 X 的概率分布为 $P(X=-1)=a$, $P(X=0)=3a$, $P(X=1)=a$, 则可得 $a+3a+a=1$, 即 $5a=1$, 解得 $a=\frac{1}{5}$ 。

11 【单选】(总分 7 分)

曲线 $y=3\arctan x$ 的渐近线方程为

- A $y=\pm 3$
- B $y=0$
- C $y=\pm\frac{3\pi}{2}$
- D $y=\pm 3\pi$

[结果] 正确答案是：C

[解析]

曲线的渐近线分为水平渐近线、垂直渐近线、斜渐近线，需根据函数的极限性质分析：

1. 分析水平渐近线

水平渐近线的判定方法是：若 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = C$ (C 为常数)，则 $y = C$ 是水平渐近线。

对于 $y = 3\arctan x$ ：

- 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\arctan x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3\arctan x = 3 \times \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$;
- 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $\arctan x \rightarrow -\frac{\pi}{2}$, 故 $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3\arctan x = 3 \times (-\frac{\pi}{2}) = -\frac{3\pi}{2}$ 。

2. 排除垂直渐近线和斜渐近线

- 垂直渐近线：需 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, 但 $\arctan x$ 在全体实数域内连续, 无这样的 x_0 , 故无垂直渐近线;
- 斜渐近线：需 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0$, 但 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3\arctan x}{x} = 0$, 故无斜渐近线。

综上, 曲线的渐近线方程为 $y = \frac{3\pi}{2}$ 和 $y = -\frac{3\pi}{2}$ 。

12 【单选】(总分 7 分)

甲、乙、丙、丁 4 名同学排成一列,甲、乙不相邻,则有几不同排法

- A 24
- B 16
- C 12
- D 8

[结果] 正确答案是： C

[解析]

1. 计算 4 人的总排法：

4 名同学全排列，有 $A_4^4 = 4! = 24$ 种。

2. 计算甲乙相邻的排法：

将甲乙视为一个整体，与丙、丁共 3 个“元素”排列，有 $A_3^3 = 3! = 6$ 种；

甲乙内部可交换顺序，有 $A_2^2 = 2$ 种；

因此甲乙相邻的排法共 $6 \times 2 = 12$ 种。

3. 计算甲乙不相邻的排法：

总排法 - 甲乙相邻的排法： $24 - 12 = 12$ 种。

13 【填空题】 (总分 7 分)

曲线 $y = -2e^x + 1$ 在点 $(0, -1)$ 处法线的方程为

[解析]

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

14 【填空题】 (总分 7 分)

函数 $f(x) = x^2 - \ln \sqrt{x}$ 的单调递减区间是

[解析]

$$(0, \frac{1}{2})$$

15 【填空题】 (总分 7 分)

设 $z = 15 + x^2y + \cos y$, 则 dz

[解析]

$$dz = 2xydx + (x^2 - \sin y)dy$$

16 【解答题】 (总分 15 分)

已知函数 $z = x^y (x > 0)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

[解析]

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}, \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$$

17 【解答题】 (总分 15 分)

计算曲线 $y=4\sin x (\pi \leq x \leq 2\pi)$ 与 x 轴所围成的图形绕 x 轴转一周所得旋转体的体积 V

[解析]

$$\int_{\pi}^{2\pi} 4 \sin x dx = 8; V = 8\pi$$

18 【解答题】 (总分 15 分)

设 $0 < a \leq e$, 证明 $a \ln x \leq \frac{1}{2}x^2$

[解析]

$$\begin{aligned} & \text{设 } g(x) = a \ln x - \frac{1}{2}x^2, \\ & g'(x) = \frac{a}{x} - x \quad (x > 0) \\ & = \frac{1}{x}(a - x^2) \\ & \text{当 } x = \sqrt{a} \text{ 时, } g'(x) = 0 \\ & \text{当 } x \in (0, \sqrt{a}), g'(x) > 0; x \in (\sqrt{a}, +\infty), g'(x) < 0 \\ & g(x) \text{ 在 } x = \sqrt{a} \text{ 时取极大值} \\ & g(\sqrt{a}) = a \ln \sqrt{a} - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a(\ln a - 1) \\ & \text{因为 } 0 < a \leq e, \text{ 所以 } g(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}a(\ln a - 1) \leq 0, \text{ 所以 } g(x) \leq 0 \\ & \text{即证得 } a \ln x \leq \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$